

## Математика

### 5 единиц обучения – второй вопросник

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון שני

#### Указания

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 15 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:  
 В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.  
 Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа  
 Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции  
 Вы должны ответить на три вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

#### הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
 בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
 פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים  
 פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
 יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק –  $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.  
 כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

## Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос –  $33\frac{1}{3}$  балла).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Даны точки  $A(0, 24)$ ,  $B(18, 0)$ .

( $\aleph$ ) Найдите уравнение геометрического места точек  $C$ , для которых:  $AC^2 + BC^2 = 1250$ .

Геометрическое место, которое вы нашли в пункте ( $\aleph$ ),

передвигают на 9 единиц влево и на 12 единиц вниз,

так что образуется новое геометрическое место.

Это новое геометрическое место пересекает ось  $y$

в точках  $E$  и  $G$  ( $E$  расположена над  $G$ ).

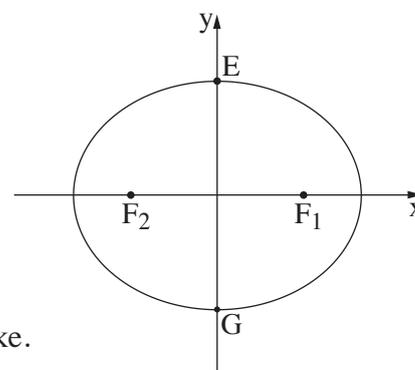
Точки  $F_1$  и  $F_2$  – это фокусы канонического эллипса,

который проходит через точки  $E$  и  $G$ , как показано на чертеже.

Дано: расстояние между прямыми  $EF_1$  и  $GF_2$  равно 24.

( $\aleph$ ) (1) Найдите координаты точки  $F_1$ .

(2) Найдите уравнение этого эллипса.



Провели окружности, касающиеся прямой  $EF_1$ , оси  $x$  и оси  $y$ .

( $\aleph$ ) Найдите уравнения двух таких окружностей, находящихся в различных квадрантах.

2. В пирамиде ABCD боковое ребро DC перпендикулярно плоскости ABC .

Точка E – середина бокового ребра AD .

Для точки F выполняется:  $\vec{DF} = \frac{k}{2} \cdot \vec{DB} + k \cdot \vec{DC}$  , k – параметр .

Обозначим:  $\vec{AB} = \underline{u}$  ,  $\vec{AC} = \underline{v}$  ,  $\vec{CD} = \underline{w}$  .

(к) Выразите  $\vec{EF}$  при помощи  $\underline{u}$  ,  $\underline{v}$  ,  $\underline{w}$  и k .

Дано:  $\vec{EF}$  параллелен плоскости ABC .

(а) Найдите значение k .

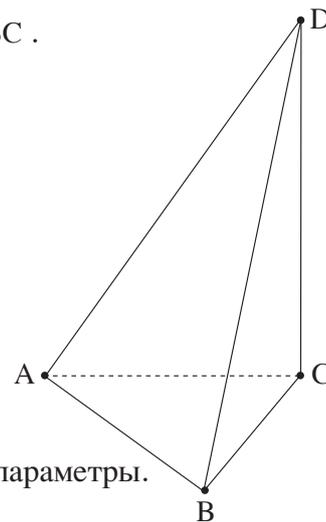
Дано:  $A(0, 0, 0)$  ,  $C(0, n, 0)$  ,  $B(p, 3, 0)$  , n и p – положительные параметры.

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 24 \text{ , } \vec{BD} = (-4, 5, 12) \text{ .}$$

(б) Найдите координаты точек C , B и D .

(г) Найдите объем пирамиды ABCD .

(д) Каково взаимное положение прямой EF и прямой AB ? Обоснуйте свой ответ.



3. Дана геометрическая прогрессия  $z_1, z_2, z_3, \dots$  , члены которой – комплексные числа, а ее знаменатель – это q .

$z_1$  находится в первом квадранте.

$$\text{Дано: } (z_1)^3 = z_3$$

$$-2z_1 = \bar{z}_3$$

(к) Докажите, что  $q = -z_1$  или  $q = z_1$  .

(а) Найдите  $z_1$  .

Ответьте на вопросы пунктов (б)–(г) для  $q = z_1$  .

$z_{4n}$  и  $z_{4n-2}$  – два члена данной геометрической прогрессии (n – натуральное число).

(б) Для каждого из этих членов прогрессии определите, является он мнимым или действительным. Обоснуйте свои утверждения.

(г) Найдите значение суммы:  $\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$  .

## Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция  $f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(a)}{\ln(x) - \ln(a)}$ ,  $a$  – параметр,  $a > 1$ .

В пунктах (к)–(г) выразите свои ответы при помощи  $a$  (при необходимости).

- (к) (1) Найдите область определения функции  $f(x)$ .
- (2) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осями координат (если таковые существуют).
- (4) Найдите области убывания функции  $f(x)$ .
- (5) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дано утверждение: у уравнения  $f(x) = f'(x)$  существует в точности одно решение в области  $x > a$ .

(г) Определите, верно или неверно данное утверждение. Обоснуйте свой ответ.

Дана функция  $g(x)$ , определенная как  $g(x) = \ln(f(x))$ .

- (г) (1) Найдите область определения функции  $g(x)$ .
- (2) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

Обозначим как  $S$  площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $g(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x = 2$  и  $x = 5$ .

Дано:  $1 < a < 2$ .

(г) Выразите при помощи  $S$  значение интеграла  $\int_2^5 \ln(2 \cdot f(x)) dx$ .

5. Дана функция  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 4}$ .

- (а) (1) Найдите область определения функции  $f(x)$ .
- (2) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите области возрастания и убывания функции  $f(x)$  (если таковые существуют).
- (4) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .
- (б) Дана функция  $g(x)$ , определенная как  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ . Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют одну и ту же область определения.
- (1) Найдите уравнения асимптот функции  $g(x)$ , перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).
- (2) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .
- (3) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $g(x)$ , ее горизонтальной асимптотой и прямыми  $x = \ln 5$  и  $x = \ln 8$ .
- (а) Найдите координаты точки пересечения графика функции  $f(x)$  и графика функции  $g(x)$ .

Дана функция  $s(x) = \int_x^{\ln 3} (f(t) - g(t)) dt$ , определенная в области  $x < \ln 3$ .

- (г) Найдите координату  $x$  точки экстремума функции  $s(x)$  и определите ее тип.

**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
Копировать или публиковать можно только  
с разрешения Министерства просвещения.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
אין להעתיק או לפרסם  
אלא ברשות משרד החינוך.